Roll No. ....

E–3569

B. Sc. (Part I) EXAMINATION, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper Second

(Calculus)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

If :

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

show that $f(x)$ is continuous at $x = 0$ but not differentiable at $x = 0$.

(ब) यदि $y=e^{a\cos^{-1}x}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+a^2)y_n=0$$

If $y=e^{a\cos^{-1}x}$, then prove that :

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+a^2)y_n=0$$

(स) टेलर प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\sin z.\frac{\sin z}{1}$$
$$-(h\sin z)^2\frac{\sin 2z}{2}+(h\sin z)^3\frac{\sin 3z}{3}+.....$$

जहाँ $z = \cot^{-1} x$ ।

Use Taylor's theorem, prove that :

$$\tan^{-1}(x+h)=\tan^{-1}x+h\sin z.\frac{\sin z}{1}$$
$$-(h\sin z)^2\frac{\sin 2z}{2}+(h\sin z)^3\frac{\sin 3z}{3}+.....$$

where $z = \cot^{-1} x$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित वक्र की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y - 1 = 0$$

Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + 2x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y - 1 = 0$$

(ब) यदि (–1, 2) वक्र $f(x) = ax^3 + bx^2$ का नति परिवर्तन बिन्दु है, तो दर्शाइये कि a = 1, b = 3।

If (–1, 2) be point of inflexion of the curve $f(x) = ax^3 + bx^2$, then show that a = 1, b = 3.

(स) $y^2(2a - x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve :

$$y^2(2a - x) = x^3$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

If n is any positive integer, then prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

(ब) दो वक्रों $y^2 = ax$ और $x^2 + y^2 = 4ax$ के उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of common region of the two curves $y^2 = ax$ and $x^2 + y^2 = 4ax$.

(स) साइक्लॉइड :

$$x = a\,(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a\,(1 - \cos\theta)$$

तथा उसके आधार के बीच के क्षेत्र में y-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of solid formed by resolving the region between the cycloid and its base about the y-axis :

$$x = a\,(\theta + \sin\theta)$$

$$y = a\,(1 - \cos\theta)$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) हल कीजिए :

$$(1 + 4xy + 2y^2)\,dx + (1 + 4xy + 2x^2)\,dy = 0$$

Solve :

$$(1+4xy+2y^2)\,dx+(1+4xy+2x^2)\,dy=0$$

(ब) हल कीजिए :

$$(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+5)y=e^{2x}\sin x$$

Solve :

$$(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+5)y=e^{2x}\sin x$$

(स) हल कीजिए :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+4y=x\log_e x$$

Solve :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+4y=x\log_e x$$

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3\cos x$$

Solve by method of variation of parameters :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3\cos x$$

(ब) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^{t}$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 4e^{2t}$$

Solve :

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^{t}$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 4e^{2t}$$

(स) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{y^2 + yz + z^2} = \frac{dy}{z^2 + zx + x^2} = \frac{dz}{x^2 + xy + y^2}$$

Solve :

$$\frac{dx}{y^2 + yz + z^2} = \frac{dy}{z^2 + zx + x^2} = \frac{dz}{x^2 + xy + y^2}$$